



Mathematik Brückenkurs

im Fachbereich Informatik & Elektrotechnik

Rumpfskript V10



Inhaltsverzeichnis

1	Mengen.....	4
2	Zahlensysteme.....	12
3	Rechenoperationen	34
4	Gleichungen.....	51
5	Logik & Beweisverfahren	74
6	Lösungen zu den Übungsaufgaben.....	94



Ziel:

Mathematische Vorbereitung auf das Hochschulstudium im Fachbereich Informatik & Elektrotechnik an der Fachhochschule Kiel.

Hinweis:

Grundlagen der Geometrie (Lehrsätze der elementaren Geometrie und grundlegende geometrische Körper) werden in diesem Brückenkurs nicht behandelt und werden vorausgesetzt.

Zielgruppe:

Erstsemester im Fachbereich Informatik & Elektrotechnik

Literatur:

- Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1, Vieweg Verlag
- Papula, Mathematische Formelsammlung, Vieweg Verlag
- Schäfer, Mathematik-Vorbereitung auf das Hochschulstudium, Harri Deutsch Verlag
- jedes einschlägige Lehrbuch der Ingenieurmathematik



1 Mengen

1.1 Grundbegriffe und Definitionen

Definition: Eine Menge ist eine Zusammenfassung einzelner wohl unterschiedener Objekte (Elemente) zu einer Grundgesamtheit.

Beispiel:

- Menge der natürlichen Zahlen,
- Menge der Einwohner in Deutschland,
- Menge der Studenten in diesem Semester u.ä.

Schreibweise:

Falls x ein Objekt der Menge M ist:

$x \in M$ (x ist Element von M)

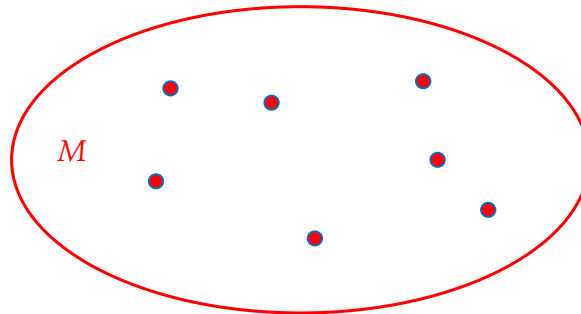
Falls x kein Objekt der Menge M ist:

$x \notin M$ (x ist nicht Element von M)

Analytische Darstellungsformen:

- Beschreibend: $M = \{x \mid \text{Eigenschaften von } x\}$, z.B. $M = \{x \mid 0 < x < 2 \wedge x \in \mathbb{R}\}$
- Aufzählend: $M = \{1, 2, 3, 4\}$ (endliche Menge)
 $M = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ (unendliche Menge)
- Leere Menge: $M = \{ \}$ auch: $M = \{\emptyset\}$

Graphische Darstellung: Mengendiagramm (Venn-Diagramm):



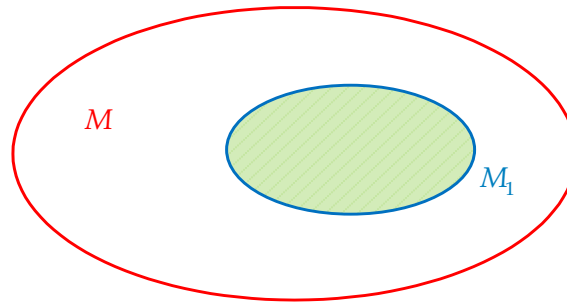
1.2 Mengenrelationen

1.2.1 Teilmengen

Definition: M_1 ist eine Teilmenge von M , wenn jedes Element von M_1 auch Element von M ist.

Schreibweise: $M_1 \subset M$

Sprechweise: „ M_1 ist in M enthalten“ oder „ M_1 ist Teilmenge von M “



Beispiel:

$$M = \{2, 3, 7, 4, 5\} \quad M_1 = \{7, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad M_1 \subset M$$

$$M = \{2, 3, 7, 4, 5\} \quad M_1 = \{7, 4, 5, 1\} \quad \Rightarrow \quad M_1 \not\subset M, \text{ da } 1 \notin M$$



1.2.2 Gleichheit zweier Mengen

Definition: Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen genau dann gleich, wenn beide Mengen die gleichen Elemente besitzen.

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2 \wedge M_2 \subset M_1$$

Symbole:

\Leftrightarrow	dann und nur dann, wenn ...	\wedge (\cap)	(logisches) und
\subset	Teilmenge von (aus)	\vee (\cup)	(logisches) oder
\in	Element von (aus)		

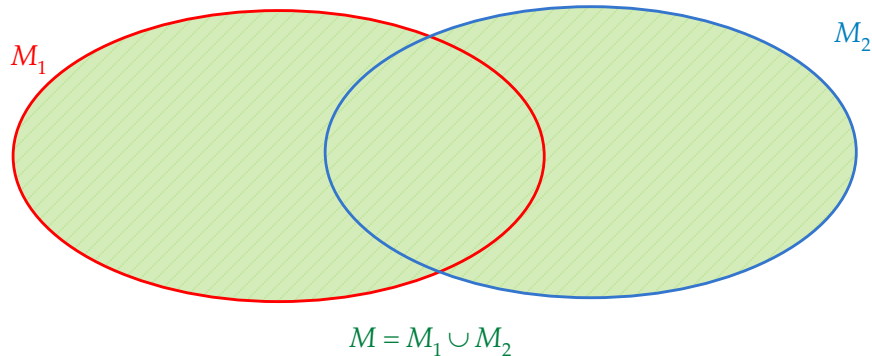
1.2.3 Mengenoperationen

1.2.3.1 Vereinigung zweier Mengen (Vereinigungsmenge)

Definition: Zur Vereinigung M zweier Mengen M_1 und M_2 gehören genau die Elemente, die mindestens in einer der beiden Mengen M_1 oder M_2 liegen.

Schreibweise: $M = M_1 \cup M_2$ bzw. $M = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\}$

Sprechweise: „ M_1 vereinigt mit M_2 “



Anmerkung:

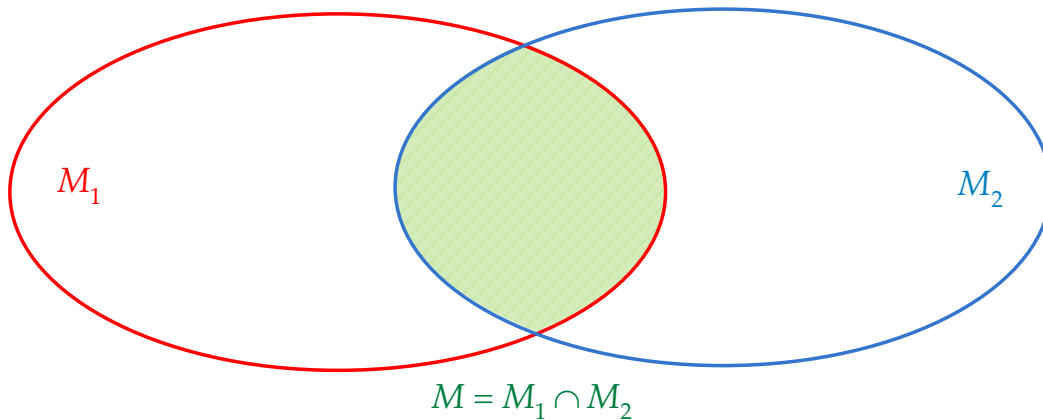
$M = M_1 \cup M_2$ wird auch Disjunktion (Verbindung) genannt.

1.2.3.2 Durchschnitt zweier Mengen (Schnittmenge)

Definition: Zum Durchschnitt M zweier Mengen M_1 und M_2 gehören genau die Elemente, die sowohl in M_1 als auch in M_2 liegen.

Schreibweise: $M = M_1 \cap M_2$ bzw. $M = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$

Sprechweise: „ M_1 geschnitten mit M_2 “



Anmerkung:

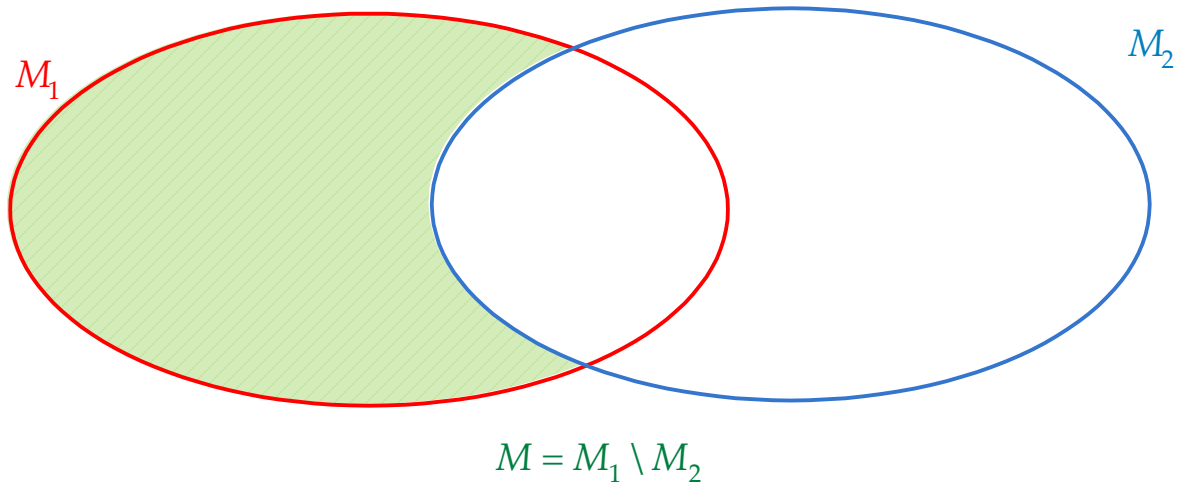
$M = M_1 \cap M_2$ wird auch Konjunktion (Verknüpfung) genannt.

1.2.3.3 Differenz zweier Mengen (Differenzmenge, Restmenge)

Definition: Zur Differenzmenge M zweier Mengen M_1 und M_2 gehören genau diejenigen Elemente von M_1 , die nicht gleichzeitig auch in M_2 enthalten sind.

Schreibweise: $M = M_1 \setminus M_2$ bzw. $M = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$

Sprechweise: „ M_1 ohne M_2 “





Übungsaufgaben

- 1) Berechnen Sie die Mengen $M_1 = A \setminus B$ und $M_2 = A \setminus (A \cap B)$ mit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
- 2) Formulieren Sie eine Schreibweise für die Menge M deren Elemente x entweder in der Menge M_1 oder in der Menge M_2 , aber nicht in der Schnittmenge von M_1 und M_2 liegen (" Exklusiv - Oder ").
- 3) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke durch Betrachten des Mengendiagramms:
 - a) $A \cup (A \setminus B)$
 - b) $A \cap (A \setminus B)$
 - c) $A \setminus (A \cup B)$
 - d) $B \cup (A \setminus B)$
 - e) $A \setminus (B \setminus A)$
 - f) $A \setminus (A \setminus B)$

2 Zahlensysteme

2.1 Reelle Zahlen

2.1.1 Natürliche Zahlen

Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Hinweis:

\mathbb{N} bzw. \mathbb{N}^* sind abzählbar unendlich

Rechenregeln (Axiome)

- Die **Addition** zweier natürlicher Zahlen $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ ist unbeschränkt ausführbar.

$c = a + b$ existiert stets mit $c \in \mathbb{N}$

Es gelten das: Kommutativgesetz: $a + b = b + a$

Assoziativgesetz: $a + (b + c) = (a + b) + c$

Monotoniegesetz: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$



- Die **Multiplikation** zweier natürlicher Zahlen $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ ist unbeschränkt ausführbar.

$c = a \cdot b$ existiert stets mit $c \in \mathbb{N}$

Es gelten das: Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Monotoniegesetz: $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad c \in \mathbb{N}^*$

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Zusammenhang Addition – Multiplikation: $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + a + \dots + a}_{b\text{-mal}}$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Anmerkung:

Binomische Formeln: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (allg. binomische Formel siehe später)

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$



- Die **Subtraktion** (=Umkehrung der Addition) ist im Bereich der natürlichen Zahlen nur beschränkt ausführbar: $c = a - b$ ist nur definiert für $b \leq a$.
- Die **Division** (=Umkehrung der Multiplikation) ist im Bereich der natürlichen Zahlen nur sehr beschränkt ausführbar: $c = \frac{a}{b}$ ist nur definiert, wenn b Teiler von a ist.

Beispiel: $c = \frac{24}{6} = 4$

(ACHTUNG: Die Division durch 0 ist prinzipiell ausgeschlossen!)

Anmerkung:

Wegen der Beschränktheit der Subtraktion in \mathbb{N} ($c = a - b$ nur erlaubt für $b \leq a$) wurde das Zahlensystem erweitert.



2.1.2 Ganze Zahlen

Erweiterung der natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen.

Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Vorzeichenregeln: $a + (-a) = 0$ $a - (-b) = a + b$
 $-(-a) = a$ $a \cdot (-b) = -a \cdot b$

Definition: Absoluter Betrag $|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

Hinweis: $|a|$ ist stets positiv.

Beispiele:

$$|5| = 5 \quad \text{weil } a = 5 > 0$$

$$|-7| = -(-7) = 7 \quad \text{weil } a = -7 < 0$$



Folgerungen:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{"Dreiecksungleichung"}$$

Rechenregeln:

- Die Addition, Multiplikation und Subtraktion sind im Ganzzahlbereich \mathbb{Z} eindeutig definiert.

Es gelten das Kommutativgesetz

 Assoziativgesetz

 Distributivgesetz

 bzgl. der o.g. Rechenoperationen

Anmerkung

Die Division ist in \mathbb{Z} nur eingeschränkt möglich, daher Erweiterung des Zahlenbereichs



2.1.3 Rationale Zahlen

Erweiterung des Zahlenbereiches um Zahlen, die sich als Bruch zweier ganzer Zahlen $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N}^*$) darstellen lassen.

$$\text{Die Menge der rationalen Zahlen } \mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Rechenregeln:

Multiplikation $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Addition und Subtraktion $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$

Division $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Kürzen und Erweitern: $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b}$ bzw. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$



Satz: Bei der Division zweier ganzer Zahlen ergibt sich in der Regel eine unendlich periodische Dezimalzahl.

Beispiel: $\frac{4}{3} = 1,333\dots = 1,\overline{3}$

Hinweis:

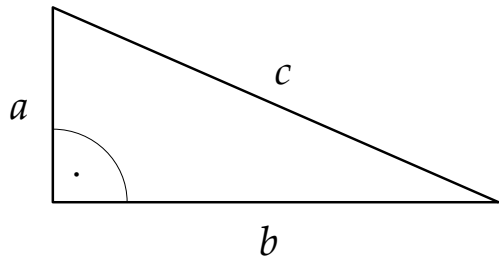
Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} sind bezüglich der Grundrechenarten (mit Ausnahme der Division durch 0) abgeschlossen; es gelten die vorgenannten Gesetze. Bei gewissen Rechenoperationen (z.B. Wurzelziehen, Logarithmieren etc.) ist der Zahlenbereich \mathbb{Q} erweiterungsbedürftig.

2.1.4 Irrationale Zahlen

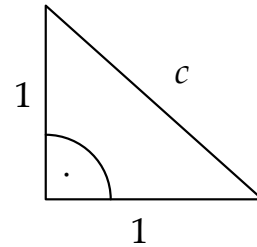
Erweiterung der rationalen Zahlen \mathbb{Q} um die Menge der irrationalen Zahlen zum reellen Zahlenbereich \mathbb{R} .

Beispiel:

Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck



$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{2}$$



Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$



Unterscheidung 2 Arten irrationaler Zahlen:

- Algebraisch irrationale Zahlen: Treten auf bei der Lösung algebraischer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$.
Bsp.: $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \approx 1,4142$
- Transzendent irrationale Zahlen; z.B. $\pi, e, \ln(2)$ etc.



2.1.5 Übersicht und Zahlengerade

Übersicht über die bisherigen Zahlenarten:

Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$$

Gebrochene Zahlen

$$\frac{1}{5} = 0,2; \quad \frac{1}{3} = 0,3\overline{3}; \quad \frac{1}{7} = 0,14287\dots$$

Algebraisch irrationale Zahlen

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots; \quad \sqrt{3} = 1,73205\dots$$

Tranzendente Zahlen

$$e; \pi; \sin(10^\circ)$$

Rationale
Zahlen

\mathbb{Q}

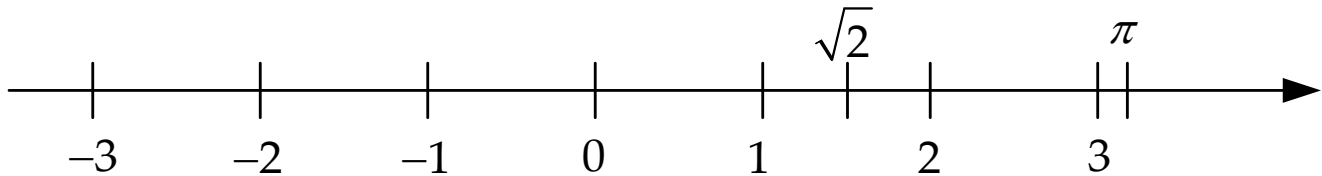
Reelle
Zahlen

\mathbb{R}

Irrationale
Zahlen



Zahlengerade: Darstellung der reellen Zahlen auf der „Zahlengeraden“



$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Sonderfälle:

$$0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0^n = 0$$

$$0 \cdot a = 0 \Rightarrow \frac{0}{a} = 0$$

Division durch 0 ist **verboten!**

$$\sqrt[n]{0} = 0;$$

$$0^{0,2} = 0$$

Folgende Ausdrücke sind nicht definiert:

$$0^{-2}; \quad 0^0; \quad \sqrt[0]{2}$$

Übungsaufgaben

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$4) \quad 7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b) =$$

$$5) \quad (a + b - c) \cdot (a - b - c) =$$

$$6) \quad (49a^2 + 42a + 9) =$$

$$7) \quad (144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2) =$$

$$8) \quad 3 \cdot (a + b + c) - 5 \cdot (a + b) - c - 2 \cdot (b - c - a) =$$

$$9) \quad \frac{5}{18} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{14}{27} + \frac{71}{81} =$$

$$10) \quad \frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1} - 2 =$$

$$11) \quad \frac{1 - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}} =$$



$$12) \quad \frac{a + \frac{1}{1-ab}}{1 - \frac{1}{1-ab}} =$$

$$13) \quad 1 - \frac{1}{1 - a \cdot \frac{1}{1 + \frac{b}{a}}} =$$

$$14) \quad \frac{b^2 - a^2}{-a - b} =$$

$$15) \quad \frac{3a-1}{4a-1} - \frac{3}{4} =$$

$$16) \quad \frac{1+a}{a-1} - \frac{4-a}{1-a} - \frac{2a-8}{1+a} + \frac{3a+7}{a^2-1} =$$

$$17) \quad \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} \right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) =$$



2.2 Komplexe Zahlen

Die reellen Zahlen sind in Bezug auf Grundrechenarten abgeschlossen.

Aber: Es gibt Rechenoperationen, die im Bereich der reellen Zahlen nicht möglich sind.

Beispiel: Finde eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich -9 ist, also $x^2 = -9 \rightarrow$ nicht möglich.

Einführung einer neuen Art von Zahlen: Imaginäre Zahlen

2.2.1 Einführung der imaginären Einheit j

Definition: Die **imaginäre Einheit** j ist eine Zahl, deren Quadrat gleich -1 ist.

$$j^2 = -1 \rightarrow j = \sqrt{-1}$$

Anmerkung:

In Mathematik/Physik wird die imaginäre Einheit üblicherweise mit i bezeichnet, also $i = \sqrt{-1}$

In der Elektrotechnik: $j = \sqrt{-1}$



Einführung neuer Begriffe:

- Multipliziert man die imaginäre Einheit j mit einer reellen Zahl b , so entsteht die **imaginäre Zahl** $j \cdot b$, also z.B. $3j, j\sqrt{2}, -5j, \frac{2}{3}j$ etc.
- Durch Zusammensetzung einer reellen Zahl mit einer imaginären Zahl entsteht eine **komplexe Zahl**
$$z = a + j \cdot b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$
- Man bezeichnet
 - a als den **Realteil** von z : $a = \operatorname{Re}(z)$ und
 - b als den **Imaginärteil** von z : $b = \operatorname{Im}(z)$
- Zu $z = a + j \cdot b$ gehört die **konjugiert komplexe Zahl** $z^* = a - j \cdot b$



2.2.2 Rechenregeln

- **Gleichheit:**

Zwei komplexe Zahlen $a+jb$ und $c+jd$ sind gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ ist

(Realteile gleich **und** Imaginärteile gleich)

- **Addition und Subtraktion:**

Komplexe Zahlen werden addiert (subtrahiert), indem ihre Realteile sowie ihre Imaginärteile addiert

(subtrahiert) werden.

Beispiel:

(2.1)



- **Multiplikation:**

Wird durchgeführt nach den Rechenregeln für reelle Zahlen unter Beachtung $j^2 = -1$

(2.2)



- **Division:**

Vorgehensweise: Nenner durch Multiplikation mit seiner konjugiert komplexen Zahl reell machen

(2.3)



Spezielle Werte:

$$j^0 = 1;$$

$$j^1 = j;$$

$$j^2 = -1;$$

$$j^3 = jj^2 = -j \quad ;$$

$$j^4 = 1;$$

$$j^{4n} = 1;$$

$$j^{4n+1} = jj^{4n} = j;$$

$$j^{-1} = \frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j;$$

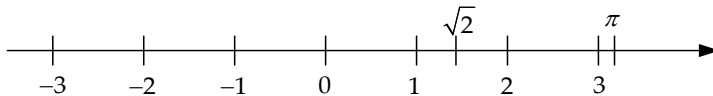
$$j^{-2} = \frac{1}{j^2} = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$(1+j)^4 = (1+j)^2 (1+j)^2 = (1+2j+j^2)^2 = (2j)^2 = -4$$

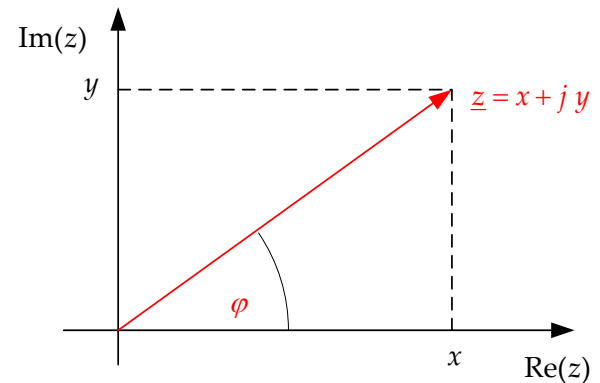
Hinweis: Vergleiche Kapitel „Komplexe Zahlen“ der Vorlesung Mathematik 1.

2.2.3 Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene (C.F. Gauß 1777-1855; „princeps mathematicorum“)

Darstellung reeller Zahlen auf Zahlengerade



Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene



Kartesische (algebraische) Darstellung einer komplexen Zahl

$$z = x + jy;$$

$$x = \text{Re}\{z\};$$

$$y = \text{Im}\{z\};$$



Trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl:

Verwendung von Polarkoordinaten: $x = r \cdot \cos \varphi$; $y = r \cdot \sin \varphi$

$$\begin{aligned}z &= x + jy \\ &= r \cdot \cos \varphi + j \cdot r \cdot \sin \varphi \\ &= r (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)\end{aligned}$$

Bezeichnungen:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} :=$ Betrag der komplexen Zahl (Satz des Pythagoras)

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) :=$ Argument, Winkel oder Phase von z



Übungsaufgaben

- 18) Berechnen Sie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$.
- 19) Berechnen Sie $\frac{3-5j}{2+3j}$ sowie $(2+3j)^3$.
- 20) Man bringe die komplexe Zahl $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ auf die Form $z = a + j \cdot b$ mit $r = 6$ und $\varphi = 60^\circ$.
- 21) Man bringe $z = 3 - j\sqrt{3}$ auf die goniometrische Form $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$. Wie lauten r und φ ?



3 Rechenoperationen

3.1 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}} = a^n \quad (a = \text{Basis}; n = \text{Exponent, Hochzahl})$$

Ausgangspunkt: $a^n = b$ ($b = \text{Numerus}$)

Fallunterscheidung:

- Potenzieren: a, n gegeben; b gesucht: $a^n = b$
- Radizieren: b, n gegeben; a gesucht: $a = b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$
- Logarithmieren: a, b gegeben; n gesucht: $n = \log_a b$

3.1.1 Potenzen

Rechenregeln: $(m, n \in \mathbb{N}^*; a, b \in \mathbb{R})$

Multiplikation

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n \cdot b^m = ?$$

Division

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Potenz

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a^n)^n = a^{n \cdot n} = a^{n^2} \neq (a^n)^2$$

Hinweis:

Für $a > 0$, $b > 0$ gelten die Potenzregeln auch für beliebige reelle Exponenten

3.1.2 Wurzeln

Rechenregeln: $(m, n \in \mathbb{N}^*; a \geq 0, b \geq 0)$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a + b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

3.1.3 Logarithmen

Ausgangspunkt: $a^n = b$ ($b = \text{Numerus}, a = \text{Basis}, n = \text{Exponent}$)

Logarithmus:

„Mit welcher Zahl muss a potenziert werden, um b zu erhalten?“

Ursprünglich erklärt für $n \in \mathbb{N}$; Verallgemeinerung: $n \rightarrow x \in \mathbb{R}$ $a^x = b \rightarrow x = \log_a b$ (mit $a > 0; a \neq 1$)

Definition: Der Logarithmus einer Zahl b zur Basis a ist der Exponent x , mit dem a potenziert werden muss, um den Numerus b zu erhalten.

Rechenregeln: ($a > 0, u > 0, v > 0, k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$)

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\log_a(u^k) = k \cdot \log_a(u)$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_a(u)$$

$$\log(a + b) \neq \log a + \log b$$



Abkürzende Schreibweisen:

Basis 10: $\log_{10}(u) := \lg(u)$ „briggscher-„ oder „dekadischer Logarithmus“

Basis e : $\log_e(u) := \ln(u)$ „logarithmus naturalis“ oder „natürlicher Logarithmus“

Basis 2: $\log_2(u) := \text{lb}(u)$ auch: $\text{ld}(u)$ „binärer Logarithmus“

Besondere Ausdrücke und Zusammenhänge:

$$\log_b 1 = 0 \quad (b^0 = 1)$$

$$\log_a a = 1 \quad (a^1 = a)$$

$$\log_b 0 \rightarrow -\infty \quad \left(\frac{1}{b^\infty} \rightarrow 0 \right)$$

$$\log_a a^x = x \quad (a^x = a^x)$$

Umrechnung von der Basis a in die Basis b

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} = K \cdot \log_a r \quad \left(K = \frac{1}{\log_a b} = \text{const} \right)$$

Spezialfälle:

$$\text{Basiswechsel } 10 \rightarrow e: \ln r = \frac{\lg r}{\lg e} = 2,3026 \cdot \lg r$$

$$\text{Basiswechsel } e \rightarrow 10: \lg r = \frac{\ln r}{\ln 10} = 0,4343 \cdot \ln r$$

Übungsaufgaben

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$22) \left(\frac{x^3}{y^{-1}} \right)^{-2} \cdot \frac{x^5}{y^{-3}} =$$

$$23) \frac{1-2a^2}{a^n} - \frac{3a-2}{a^{n-2}} + \frac{3}{a^{n-3}} =$$

$$24) \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^{10}}} + \sqrt[9]{y^6} \sqrt[4]{y^{12}} =$$

$$25) a \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} =$$

$$26) \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} =$$

$$27) a \cdot b \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} =$$

$$28) a^{x+y} \cdot a^{x-y} =$$



$$29) \frac{b^{7x+5y}}{b^{4x-5y}} - \frac{b^{6y+8x}}{b^{5x-4y}} =$$

$$30) 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$31) \sqrt[a]{\left(\frac{n^{x+a}}{n^x}\right)^c} =$$

$$32) (n+x)^{3/4} \cdot \sqrt[4]{(n+x)^5} =$$

$$33) 16\sqrt{a^6 \cdot b^7} \div 4\sqrt{a^4 \cdot b^5} =$$

$$34) \sqrt[3]{x\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} =$$

$$35) a) 2n^{3x-2a} \cdot n^{x+a} + 3a^{2x-3y} \cdot 5a^{3x+y} =$$

$$b) \left(\frac{a^2}{x^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2x^2}{5a^2}\right)^{-1} \cdot 2ax^{-4} =$$



$$36) \quad \text{a) } \lg \sqrt[6]{\frac{u^5 \sqrt{b}}{(x \cdot y)^a}} = \quad \text{b) } \log_a \frac{u^3 \sqrt{u+v}}{a} \quad \text{c) } \log_c \frac{c^7 - c^4}{b}$$

$$37) \quad \log \frac{2\sqrt{a+b} \cdot a^3 \cdot b^2}{\sqrt[3]{c} \cdot (a+c)^2} =$$

$$38) \quad \lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}} =$$

$$39) \quad \frac{1}{2} \lg a + 2 \lg c - \frac{1}{3} \left(\lg b^3 + \lg a^{3/2} \right) =$$

$$40) \quad \frac{1}{2} \lg (a^2 - ab + b^2) + \frac{1}{2} \lg (a+b) =$$

$$41) \quad \lg \left(\frac{a}{b} \right) + \lg (ab) - 2 \lg (a-b) =$$

$$42) \quad \log_5 x = -2$$

$$43) \quad \lg \sqrt{\frac{1}{10}} =$$



- 44) Finden Sie die Basis b , für die gilt: $\log_b 16 = \log_6 36$
- 45) Zeigen Sie: $a^{4\log_a b} = b^4$
- 46) Mit welchem Faktor muss man einen natürlichen Logarithmus multiplizieren, um den entsprechenden dekadischen Logarithmus zu erhalten?
- 47) Die Gleichung $A \cdot B^{C \cdot \lg D + E} = F$ ist nach B bzw. nach D aufzulösen.
- 48) Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen:
- a) $2 \lg x - \frac{1}{2} \lg y$
- b) $\lg \left(\frac{x}{y} \right) + \lg(x \cdot y) - 3 \lg(x - y)$

3.2 Binomischer Lehrsatz

Der Ausdruck $a \pm b$ heißt „Binom“ und ist Summe oder Differenz 2er „Monome“.

Bildet man Potenzen des Binoms, so ergibt sich durch Ausmultiplizieren:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$$

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

$$\begin{array}{cccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Gesetzmäßigkeit über das **Pascalsche Dreieck** (Blaise Pascal 1623 – 1662):

$$\begin{array}{cccccccc} (a+b)^0 & & & & & & & 1 \\ (a+b)^1 & & & & & 1 & & 1 \\ (a+b)^2 & & & & 1 & & 2 & & 1 \\ (a+b)^3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ (a+b)^4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ (a+b)^5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow (a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b^1 + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a^1 \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$$

Man erkennt:

Die erste und letzte Zahl einer Zeile ist immer 1

Die anderen Zahlen ergeben sich als Summe der jeweils links und rechts darüber stehenden Zahlen der Zeile zuvor.



Andere Berechnung der Koeffizienten:

(3.1)



Einführung von Kurzschreibweisen (Euler 1707-1783):

(3.2)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \quad \text{mit } n \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \quad \text{mit } n \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} = \text{Binomialkoeffizienten mit } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Anmerkungen:

Weitere Kurzschreibweise: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n := n!$ (Lies: „ n -Fakultät“)

Aus der Definition folgt sofort: $(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}_{n!} \cdot (n+1) = (n+1) \cdot n!$

Damit gilt für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ falls $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ \Rightarrow \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}; n \geq k) \end{aligned}$$



Spezialfälle:

(3.3)

Übungsaufgaben

49) Berechnen Sie:

a) $\binom{13}{4}$ b) $\binom{10}{5}$

50) Entwickeln Sie $(3p^2 - 2\sqrt{q})^4$.51) Wie lautet der konstante Term - also der Term, der kein x enthält -

in $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$?

52) Wie lautet der 5. Term in $(2 + 2x^3)^{17}$?53) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ist zu beweisen.

Anleitung: Man setze im binomischen Lehrsatz $a = b = 1$.

54) Man zeige: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$

Anleitung: Man setze im binomischen Lehrsatz $a = 1$ und $b = -1$ und verwende vorhergehende Aufgabe.

55) Welchen Koeffizienten hat der Term $x^3 y z^2$ im Ausdruck $(x + 2y - 3z)^6$?

4 Gleichungen

Einteilung der Gleichungen z.B. nach

- Anzahl der auftretenden Variablen
 - Gleichung mit einer Variablen
 - Gleichung mit zwei Variablen, etc.
 - Art der Verknüpfung der Variablen und Zahlen
- algebraischen Gleichungen:**
- rationale Rechenoperationen +, -, *, / und das Radizieren (=Wurzelziehen) existieren endlich oft, ohne dass
 - die Variable im Exponenten erscheint,

$$\underbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}_{\text{Polynom}} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}; \text{ alle } a_i (i = 1, \dots, n) \text{ reell})$$

Falls $n = 1$: Gleichung 1. Grades

Falls $n = 2$: Gleichung 2. Grades, etc.

transzendente Gleichungen, z.B.

$$\sin x - \cos x = 1;$$

$$2^{3x+7} = 5^{x+2};$$

$$2 \ln(x+3) = x + \sin x;$$

etc.



4.1 Gleichungen 1. Grades mit einer Variablen

Die Gleichung $a \cdot x + b = 0$ ($a \neq 0$) hat genau eine Lösung $x = x_1 = -\frac{b}{a}$

4.2 Gleichungen 2. Grades mit einer Variablen

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ($a \neq 0$) stets überführbar in $x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_p \cdot x + \underbrace{\frac{c}{a}}_q = 0$

(4.1)



Vietascher Wurzelsatz (François Viète 1540-1603): $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Diskriminante: Ausdruck unter der Wurzel

$$\left. \begin{array}{l} D_1 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ \text{bzw.} \\ D_2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{array} \right\} \hat{=} \text{Diskriminante}$$

Es ergeben sich 3 Typen von Lösungen:

- $D > 0$: 2 reelle Lösungen x_1 und x_2 mit $x_1 \neq x_2$
- $D = 0$: 1 reelle Lösung $x_1 = x_2 = x$
- $D < 0$: keine reellen Lösungen (komplexe Lösungen)



Beispiele

(4.2)



4.3 Gleichungen höheren Grades mit einer Variablen

$n = 3$ analytische Lösungen (Cardanische Formel) vorhanden; aber umständlich in der Anwendung.

$n = 4$ analytische Lösungen vorhanden; sind aber für die Praxis kaum brauchbar.

$n > 4$ keine analytischen Lösungen möglich, nur numerisch lösbar.



4.4 Zerlegung in Linearfaktoren

Algebraische Gleichung 2. Grades $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Zuweisung: Polynom $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Nullstellen des Polynoms:

(4.3)



Algebraische Gleichung 3. Grades $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$

(4.4)

Für ein Polynom n -ten Grades $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ gelten folgende Sätze:

Satz 1: Besitzt das Polynom $f(x)$ an der Stelle $x = x_1$ eine Nullstelle, so gilt: $f(x) = (x - x_1)g(x)$
 $(x - x_1)$ heißt Linearfaktor
 $g(x)$ = reduziertes Polynom

Satz 2: Ein Polynom n -ten Grades hat höchstens n reelle Nullstellen

Satz 3: Besitzt $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ genau n reelle Nullstellen, so gilt:
$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Satz 4: Fundamentalsatz der Algebra (C.F. Gauß, Dissertation 1799)
Eine algebraische Gleichung n -ten Grades hat stets n Wurzeln
(diese sind evtl. komplex und evtl. mehrfach)

Satz 5: Hat eine Gleichung n -ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Lösung, so ist diese als Teiler in dem absoluten Glied enthalten (Vieta)



(4.5)

Hinweis:

Bei einer doppelten (n – fachen) Nullstelle tritt der zugehörige Linearterm doppelt (n – fach) auf.

Übungsaufgaben

Lösen Sie die Gleichungen nach x auf:

56) a) $\frac{x}{a-b} - b = \frac{x}{a+b} + b$

b) $\frac{a+x}{x} + a = a \cdot \frac{x+1}{a+x} + 1$

c) $2 \cdot [x \cdot (2x+a) - a^2] = (2x-1) \cdot (2x-a)$

d) $\frac{4x+3}{3} - 1 = 4 - \frac{x-3}{6} + \frac{3x+8}{4} - 4,25$

e) $\frac{2x+1}{9} + \frac{6}{x+2} = \frac{x-2}{2} + \frac{x-1}{3}$

f) $(a-b)^2 - x^2 = (x-a) \cdot (x-a+b)$

g) $\frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}}$

h) $\frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} = \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3}$

57) Lösen Sie die quadratischen Gleichungen

a) $(3x-7) \cdot (x+2) = 0$

b) $3x^2 + 5x = 0$

c) $x^2 + 5x + 6 = 0$

d) $3x^2 - 5x + 4 = 0$



58) $(x-1)^2 \cdot (x+2) = 4 \cdot (x+2)$

59) Gegeben sei $x^2 + 2 \cdot (k+2) \cdot x + 9k = 0$.
Für welches k fallen die Nullstellen dieser
quadratischen Gleichung zusammen?

60) Ermitteln Sie die Lösungen (Wurzeln) der kubischen Gleichung $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$



4.5 Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen: Die Unbekannte x tritt in Wurzelausdrücken auf.

Lösungsverfahren:

- 1) Wurzelausdruck isolieren (evtl. mehrere Schritte nötig)
- 2) Quadrieren (bzw. potenzieren)
- 3) Nach der Unbekannten x auflösen
- 4) Probe ist Teil der Lösung!



Beispiel:

(4.6)

Übungsaufgaben

Lösen Sie die Gleichungen nach x auf

61) $3 - 2\sqrt{x} = -4$

62) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$

63) $\sqrt{16 + 3\sqrt{7x-5}} = 2\sqrt{7}$

64) $\sqrt{x+3} + \sqrt{2(x-4)} = \frac{15}{\sqrt{x+3}}$

65) $\sqrt{2x-3} + 5 - 3x = 0$

66) $\sqrt{x+15} - \sqrt{10-x} = 1$

67) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} - \sqrt{8x+1} = 0$

68) $\sqrt[3]{28 - \sqrt{2x-3}} = 3$

69) $(3n + \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x} - 2n) = x - n^2$

70) $7 + 3\sqrt{2x+4} = 16$

71) $\sqrt{2x+19} + 5 = 0$

72) $\sqrt{16^{2x-2}} = 2^{3x-2}$

73) $3^{x-7} = 9^{x+4}$

74) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

75) $p = p_0 \cdot e^{\frac{-\rho \cdot g \cdot h}{p_0}} \rightarrow h = ?$

76) $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}} \rightarrow n = ?$

77) $2 \ln x = \ln 16$

78) $\lg(2x+3) = \lg(x-1) + 1$

79) $5^{\lg x} = 2 \cdot 3^{\lg x}$



$$80) \quad \lg x^2 = 3 \cdot \lg 4$$

$$81) \quad \ln \frac{1+x}{1-x} = a$$

$$82) \quad \lg(x-1) + \lg 3 = \lg(x^2 - 1)$$

$$83) \quad \lg(\sqrt{ax} + 1) + \lg(\sqrt{ax} - 1) - 2\lg(ax - 1) - 1 = 0$$

$$84) \quad \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln x$$



4.6 Betragsgleichungen

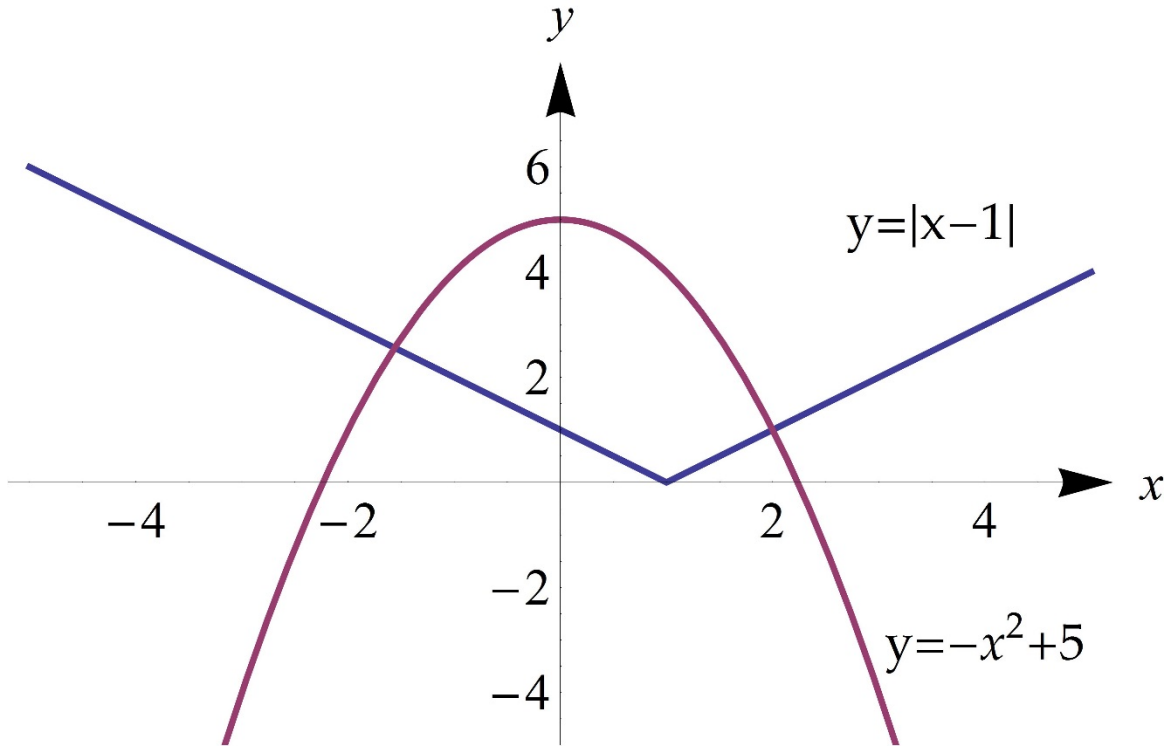
Die Unbekannte x tritt unter dem Absolutzeichen auf.

Lösung erfolgt über Fallunterscheidung

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$



Beispiel: $|x-1| = -x^2 + 5$





(4.7)



Übungsaufgaben

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$85) \quad |x^2 - 2| = x$$

$$86) \quad |x^2 - x| = 24$$

$$87) \quad |x + 1| = |x - 1|$$

$$88) \quad |2x + 4| = -(x^2 - x - 6)$$



4.7 Ungleichungen

Beispiel: $2x + 5 > 9$ Gesucht: $x = ?$

Regeln:

- Addition oder Subtraktion eines beliebigen Terms auf beiden Seiten der Ungleichung ist erlaubt.
- Multiplikation oder Division der Ungleichung mit einer positiven Zahl $c > 0$ ist erlaubt.
- Multiplikation oder Division einer Ungleichung mit einer negativen Zahl $c < 0$ ändert das Relationszeichen:

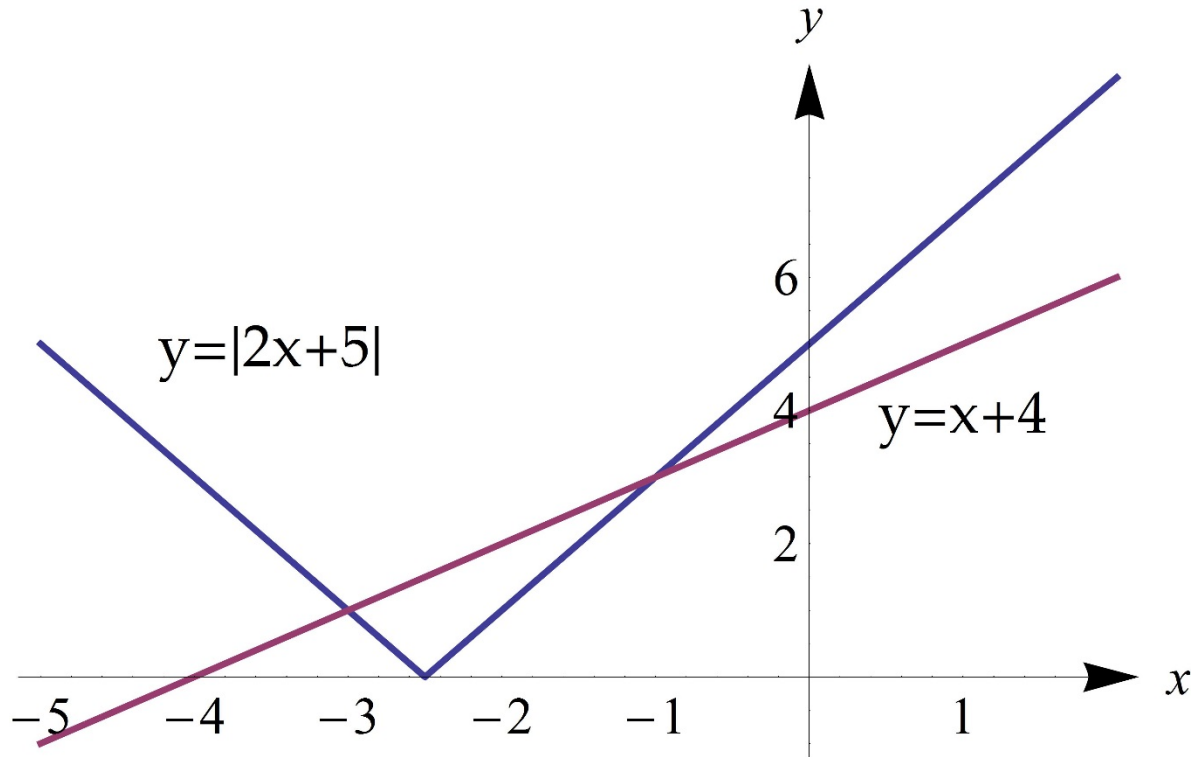
aus $\left\{ \begin{array}{l} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{array} \right.$ wird $\left\{ \begin{array}{l} < \\ \leq \\ > \\ \geq \end{array} \right.$

Hinweis:

Die Lösungen sind oft Intervalle.



Beispiel: Für welche x gilt: $|2x+5| \leq x+4$?





(4.8)



Übungsaufgaben

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:

89) $x^2 - x - 2 \leq 0$?

90) $(x-1)^2 \leq |x|$

91) $x^2 + x - 1 \geq 0$

92) $|x^2 - 9| < |x - 1|$

93) $\frac{x-1}{x+1} < 1$

5 Logik & Beweisverfahren

5.1 Elementare Logik

Eine Aussage ist ein Satz, von dem eindeutig entschieden werden kann, ob er wahr oder falsch ist.

Ereignisse (Aussagen),

z.B.

A = der Luftdruck beträgt heute 1013 hPa

B = ich gehe heute ins Kino

C = es regnet nicht

Negation von Ereignissen:

z.B.

\bar{A} = der Luftdruck beträgt heute nicht 1013 hPa

\bar{B} = ich gehe heute nicht ins Kino

\bar{C} = es regnet (es ist nicht richtig,
dass es nicht regnet)

Anmerkung:

- Wahrheitswert: wahr: w oder 1
falsch: f oder 0

Anmerkung:

- andere Schreibweise für Negation: $\neg A$



Verknüpfung von Aussagen:

Summe von Ereignissen:

$A + B \hat{=}$ Ereignis A **oder** Ereignis B tritt ein
oder beide treten gemeinsam ein.

Auch: Mindestens ein Ereignis tritt ein

Produkt von Ereignissen:

$AB \hat{=}$ Ereignis A **und** Ereignis B treten beide
gemeinsam ein.

Beispiel:

$A =$ Maren besteht die Mathe-Klausur

$B =$ Sven besteht die Mathe-Klausur

$A + B =$ Maren besteht oder Sven besteht

die Mathe-Klausur

oder beide bestehen die Mathe-Klausur

Beispiel:

$A =$ die Daten sind richtig

$B =$ die Gleichungen sind richtig

$AB =$ die Daten und die Gleichungen sind richtig

Gleichbedeutende Notationen der Ereignisalgebra

	Boolesche Algebra		Mengenlehre	Logik	Bedeutung
Summe von Ereignissen (Disjunktion)	$A + B$	$A \vee B$	$A \cup B$	„oder“	A oder B (oder beide)
Produkt von Ereignissen (Konjunktion)	$A \cdot B$	$A \wedge B$	$A \cap B$	„und“	A und B gemeinsam

Anmerkung:

Neben der ODER-Verknüpfung gibt es auch die „ENTWEDER ... ODER“-Verknüpfung: $A \text{ XOR } B$ oder auch $A \oplus B$. Diese Aussage ist genau dann wahr, wenn entweder A oder B , aber nicht beide gemeinsam wahr sind.



Wahrheitstabellen

Verknüpfte Aussagen lassen sich am besten durch ihre Wahrheitstabelle beschreiben.

A	B	\bar{A}	\bar{B}	AB	$A+B$	$A\oplus B$
W	W	F	F	W	W	F
W	F	F	W	F	W	W
F	W	W	F	F	W	W
F	F	W	W	F	F	F

Anmerkung

- $A+B+C, \dots$ ist wahr, wenn mindestens eines der Ereignisse A, B, C, \dots wahr ist („oder“)
- $ABC \dots$ ist wahr, wenn alle Ereignisse A, B, C, \dots gemeinsam wahr sind („und“)

Implikation und Äquivalenz:

Schlussfolgerungen können in der Mathematik durch die folgenden Verknüpfungen beschrieben werden.

WENN-DANN-Verknüpfung (Subjunktion) $A \rightarrow B$ (gelesen "Wenn A , dann B ") und

GENAU-DANN-Verknüpfung (Bijunktion) $A \leftrightarrow B$ (gelesen " A genau dann, wenn B ")

von zwei Aussagen A bzw. B sind durch ihre Wahrheitstabellen folgendermaßen definiert:

A	B	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
W	W	W	W
W	F	F	F
F	W	W	F
F	F	W	W

**Definition:**

Ist die Aussage $A \rightarrow B$ wahr, so spricht man von einem logischen Schluss (**Implikation**) und schreibt $A \Rightarrow B$.

Anmerkung:

- Für $A \Rightarrow B$ sagt man: "Aus A folgt B " oder " A impliziert B ", oder "Wenn A , dann B " oder " A ist hinreichend für B " oder " B ist notwendig für A ".
- „ $A \Rightarrow B$ “ bedeutet: Wenn A wahr ist, so ist auch B wahr.
Wenn A falsch ist, so kann B wahr oder falsch sein.
- Für Aussageformen bedeutet $A \Rightarrow B$, dass $A(x) \Rightarrow B(x)$ für alle x wahr ist.
- $A \Rightarrow B$ bedeutet dasselbe wie $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (wichtig für Beweisverfahren, vgl. später)



Beispiel:

(5.1)

Definition:

Wenn die Aussage $A \leftrightarrow B$ wahr ist, dann spricht man von **Äquivalenz** und schreibt $A \leftrightarrow B$.

Anmerkung:

- Die Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ bedeutet, dass sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $B \Rightarrow A$ gilt.
- Man sagt: "A genau dann, wenn B" oder "A dann und nur dann, wenn B" oder "A ist notwendig und hinreichend für B".
- Wenn $A \leftrightarrow B$ gilt, bedeutet dies: Die Aussagen A und B haben denselben Wahrheitswert.

Beispiel: „ x ist eine gerade Zahl $\leftrightarrow x$ ist durch 2 teilbar“ ist eine wahre Aussage.

(„ x ist gerade genau dann, wenn x durch 2 teilbar“ oder

„ x ist gerade dann und nur dann, wenn x durch 2 teilbar ist“)



Übungsaufgaben

- 94) Es gilt: „Wenn ich schlafe, habe ich geschlossene Augen.“
Was trifft zu?
- a) Wenn meine Augen offen sind, bin ich wach.
 - b) Wenn ich nicht schlafe, sind meine Augen offen.
 - c) Wenn ich geschlossene Augen habe, schlafe ich.
- 95) Graf Hubert wurde in seinem Arbeitszimmer ermordet. Der Arzt hat festgestellt, dass der Tod zwischen 09 Uhr 30 und 10 Uhr 30 eingetreten ist. Die Haushälterin von Graf Hubert ist um 10 Uhr vom Garten in die Küche gegangen. Um an der Haushälterin vorbeizukommen, muss der Mörder vor 10 Uhr mit einem Schlüssel durch die Eingangstür oder nach 10 Uhr durchs Fenster eingestiegen sein. Kommissar Berghammer vermutet einen der drei Erben A, B oder C als Mörder. A hat als einziger einen Schlüssel, kann aber wegen eines Gipsfußes nicht durchs Fenster gestiegen sein. A und B haben beide kein Alibi für die Zeit nach 10 Uhr (wohl aber für die Zeit vor 10 Uhr) und C hat kein Alibi für die Zeit vor 10 Uhr (wohl aber für nach 10 Uhr). Wer von den dreien kommt als Mörder in Frage?

5.2 Beweistechniken

In Beweisen wird stets aus der Gültigkeit bestimmter Aussagen, der Voraussetzungen, auf die Gültigkeit anderer Aussagen geschlossen.

5.2.1 Direkter Beweis

Beim direkten Beweis wird aus einer Voraussetzung A die Behauptung B hergeleitet., es wird also die Gültigkeit $A \Rightarrow B$ gezeigt.

Vorgehensweise: Es gilt A , daraus B folgern.

Beispiel: Satz: Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist durch drei teilbar.

(5.2)

Aussage A : a, b, c sind drei aufeinander folgende natürliche Zahlen (d.h. $b = a + 1, c = a + 2$)

Aussage B : $a + b + c$ ist durch 3 teilbar (d.h. $(a + b + c) : 3 \in \mathbb{N}$)

Behauptung: $A \Rightarrow B$





Übungsaufgaben

96) Gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ und beliebiges $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ immer $\frac{x}{b+x} < \frac{y}{b+y}$?



5.2.2 Indirekter Beweis durch Kontraposition

Der indirekte Beweis durch Verwendung der Kontraposition ist oft eine einfachere Möglichkeit als der direkte Beweis, um eine Implikation $A \Rightarrow B$ zu beweisen.

Die Kontraposition zur Implikation "Wenn A , dann B " ist die Aussage "Wenn nicht B , dann nicht A ";

beide sind logisch äquivalent $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$

Vorgehensweise: Es gilt \bar{B} , daraus \bar{A} folgern

Beispiel: Satz: Für $m \in \mathbb{N}$ gilt: Ist m^2 gerade, folgt daraus, dass m gerade ist.

(5.3)

Aussage A : m^2 gerade

Aussage B : m gerade

Behauptung: $A \Rightarrow B$

zeige: $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$





5.2.3 Indirekter Beweis durch Widerspruch

Die Subjunktion $A \rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist: $\overline{A \rightarrow B} \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}$

Vorgehensweise: Annahme: Es gilt A und \overline{B} ; woraus ein Widerspruch folgt

Es wird gezeigt: Es gilt nicht $A \wedge \overline{B}$, was äquivalent ist zu: es gilt nicht $\overline{A \rightarrow B}$,
was gleichbedeutend ist zu: es gilt $A \rightarrow B$

Beispiel: Satz: Für $m \in \mathbb{N}$ gilt: Ist m^2 gerade, folgt daraus, dass m gerade ist.

(5.4)

Aussage A : m^2 gerade

Aussage B : m gerade

Behauptung: $A \Rightarrow B$

zeige: $\overline{A \wedge \overline{B}}$





Übungsaufgaben

97) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.



5.2.4 Vollständige Induktion

(lat. inducere = hinführen)

Anwendbar auf Aussagen, die für alle $n \in \mathbb{N}$ bestehen oder

die für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wobei n_0 die kleinste Zahl ist, für die die Aussage besteht

Vorgehensweise:

- 1) Induktionsanfang: Beweis für das kleinste n , für das die Aussage gelten soll, auf direktem Weg.
- 2) Induktionsbehauptung: Aussage gelte für ein festes, aber beliebiges n
- 3) Induktionsschluss: Zeigen, dass wenn die Aussage für n gilt, sie auch für $n+1$ gelten muss (Schluss von n auf $n+1$)

Beispiel:

Eine Behauptung lautet: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$



(5.5)

Übungsaufgaben

98) Beweisen Sie durch " Schluss von n auf $n + 1$ " (vollständige Induktion), dass gilt:

a) $\sum_{k=1}^n (6k - 5) = n(3n - 2)$

b) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

c) $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} \quad (x \neq 1)$

99) Beweisen Sie durch „Schluss von n auf $n + 1$ " (vollständige Induktion), dass der Ausdruck $x^{2n} - y^{2n}$ durch $(x + y)$ teilbar ist ($n \in \mathbb{N}; x, y \in \mathbb{R}$).

6 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Mengen:

1) $M_1 = \{1, 3\}; M_2 = \{1, 3\} = M_1$

2) $M = \{x \mid (x \in M_1 \vee x \in M_2) \wedge x \notin (M_1 \cap M_2)\}$

3) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke durch Betrachten des Mengendiagramms:

a) A

b) $A \setminus B$

c) $\{ \}$

d) $A \cup B$

e) A

f) $A \cap B$

Vereinfachen von Ausdrücken

4) $3a + 4b + 3$

5) $a^2 - 2ac - b^2 + c^2$

6) $(7a + 3)^2$

7) $4a^2 - 3b$

8) $-4(b - c)$



Bruchrechnung:

9) $\frac{176}{81}$

10) $\frac{2}{a^2 - 1}$

11) a

12) $\frac{a^2b - a - 1}{ab}$

13) $\frac{a^2}{a^2 - a - b}$

14) $a - b$

15) $\frac{-1}{4 \cdot (4a - 1)}$

16) $\frac{-2a^2 + 18a + 4}{a^2 - 1}$

17) $-\frac{x}{y} - 1 - \frac{y}{x}$

Komplexe Zahlen

18) -1

19) $\frac{-9}{13} - \frac{19}{13}j; -46 + 9j$

20) $3 + 3\sqrt{3} \cdot j$

21) $r = 2\sqrt{3}; \varphi = -30^\circ$



Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

22) $\frac{y}{x}$

23) $\frac{1}{a^n}$

24) $x + y$

25) $\sqrt{a^2 + b^2}$

26) $\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$

27) $\sqrt[3]{ab(b^2 - a^2)}$

28) a^{2x}

29) 0

30) 2

31) n^c

32) $(n + x)^2$

33) $4ab$

34) $-3\sqrt{x} =$

35) a) $2n^{4x-a} + 15a^{5x-2y}$ b) $\frac{5}{a}$

36) a) $\frac{1}{6} \left[5 \lg u + \frac{1}{2} \lg b - a(\lg x + \lg y) \right]$

b) $3 \log_a u + \frac{1}{2} \log_a (u + v) - 1$

c) $4 + \log_c (c^3 - 1) - \log_c b$

37) $\log 2 + \frac{1}{2} \log(a + b) + 3 \log a + 2 \log b$
 $-\frac{1}{3} \log c - 2 \log(a + c)$



38) $\frac{1}{3}[\lg a + 2 \lg c - \lg b - \lg d]$

39) $\lg \left[\frac{c^2}{b} \right]$

40) $\lg \left(\sqrt{a^3 + b^3} \right)$

41) $\lg \left(\frac{a}{a-b} \right)^2$

42) $x = \frac{1}{25}$

43) $-\frac{1}{2}$

44) $b = 4$

45) identische Ausdrücke

46) $k = \lg e = \frac{1}{\ln 10}$

47) $B = \left(\frac{F}{A} \right)^{\frac{1}{C \cdot \lg D + E}} ; D = 10^{\frac{\lg F - \lg A - E \cdot \lg B}{C \cdot \lg B}}$

48) a) $\lg \frac{x^2}{\sqrt{y}}$ b) $\lg \left(\frac{x^2}{(x-y)^3} \right)$



Binomischer Lehrsatz

49) Berechnen Sie:

a) 715 b) 252

50) $81p^8 - 216p^6\sqrt{q} + 216p^4q - 96p^2q^{\frac{3}{2}} + 16q^2$

51) 672

52) $2380 \cdot 2^{17} x^{12}$

53) Behauptung stimmt

54) Behauptung stimmt

55) 1080



Gleichungen

Lösen Sie die Gleichung nach x auf

56)

a) $a^2 - b^2$

b) -1

c) $x = \frac{a}{2}$

d) 3

e) $\frac{-40}{11}; 4$ f) $a - b; \frac{b}{2}$

g) 12

h) $\frac{-17}{2}; -2$

Quadratische Gleichungen:

57) a) $\frac{7}{3}; -2$ b) $0, \frac{-5}{3}$

c) $-3, -2$ d) $\frac{5 \pm j\sqrt{23}}{6}$

58) $3; -1; -2$

59) $4; 1$

60) $x_0 = -1; x_{1,2} = 2 \pm j\sqrt{3}$



Wurzel-, Exponential- u. logarithm. Gleichungen

61) $\frac{49}{4}$

62) 17

63) 3

64) 6

65) 2

66) 1

67) 3

68) 2

69) $25n^2$

70) $\frac{5}{2}$

71) keine Lösung

72) 2

73) -15

74) 2

75) $\frac{p_0}{\rho g} \ln \frac{p_0}{p}$

76) $\frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{\ln \frac{T_1}{T_2} - \ln \frac{p_1}{p_2}}$

77) 4

78) $\frac{13}{8}$

79) 22,75

80) ± 8

81) $\frac{e^a - 1}{e^a + 1}$

82) 2



83) $\frac{11}{10a}$

84) $e^2; e^{-1}$

Betragsgleichungen

85) 1; 2

87) 0

86) $-4,42443; 5,42443$

88) $-2; 1$

Ungleichungen

89) $-1 \leq x \leq 2$

92) $-3,702 < x < -2,372$

90) $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\wedge 2,702 < x < 3,372$

91) $\left\{ x \mid x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

93) $x > -1$

Beweistechniken

94) a) wahr, b) falsch, c) falsch

95) Behauptung gilt immer

96) Nur Erbe B kommt als Mörder in Frage

97) Beweis über Widerspruch möglich.



Vollständige Induktion

- 98) Behauptungen stimmen
- 99) Behauptung stimmt