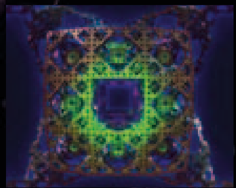
einander liegende Punkte unterschiedliche Ergebnisse. Daraus lassen sich in der komplexen Zahlenebene sehr anmutige Bilder berechnen. Die Abbildung zeigt das Bild zu $f(z) = z^3-1$. Der Koordinaten-Ursprung liegt in der Bildmitte. Wie bei der Mandelbrot-Menge werden die Punkte je nach der Geschwindigkeit ihrer Konvergenz eingefärbt (dunkel = schnelle Konvergenz).

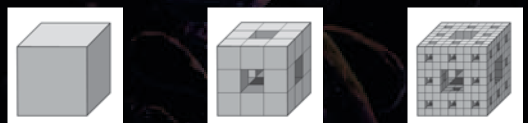
Charakteristisch für die Newton-Fraktale sind Schnüre aus schleifenförmigen Mustern; eine Ausschnittvergrößerung zeigt, dass die „Schnüre“ aus ähnlichen Schleifen bestehen. Das vorangegangene untere Bild zeigt einen Ausschnitt mit 30facher Vergrößerung aus dem Oberen, an der Stelle zwischen den beiden oberen Nullstellen berechnet. Es erinnert an die Stützrippen in gotischen Gewölben.

Menger-Schwamm



Das Objekt wurde 1926 von dem österreichischen Mathematiker Karl Menger (1902 – 1985) beschrieben, als er sich mit dem Problem der Festlegung eines Dimensionsbegriffs für mathematische Mengen beschäftigte.

Die Entstehung des Schwamms wird durch ein iteratives Verfahren (wiederholte Anwendung) beschrieben: Ausgehend von einem massiven Würfel wird aus jeder der 6 Oberflächen nach einer Teilung der Kanten in d = 3 Teile der mittlere Würfel entfernt, auch in der unsichtbaren Mitte des Würfels. Dadurch entsteht ein Körper, der aus $N(d) = 8 \cdot 2 + 4 = 20$ einzelnen massiven, kleineren Würfeln besteht. Die Oberfläche ist nach diesem Schritt vergrößert und das Volumen verkleinert. Die Wiederholung dieser Bearbeitung auf jeden dieser kleineren Würfel führt nach vielen Wiederholungen dieser Prozedur zu einem Körper mit sehr großer Oberfläche und sehr kleinem Volumen in dem Raumbereich, den der Ausgangswürfel eingenommen hatte.



Die Hausdorff-Dimension D (benannt nach dem deutschen Mathematiker Felix Hausdorff, 1868 – 1942) wird berechnet durch $D = \log(N(d)) / \log(d)$. Dabei ist N(d) die Zahl der Zahl der im Iterationsschritt aus einem Objekt neu entstehenden Objekte (die kleineren Würfel im mittleren Bild) und d der Faktor der Verkleinerung der Kantenlänge bei der Iteration.

Die Hausdorff-Dimension des Volumens für den Menger-Schwamm ist $D = \log(20) / \log(3) = 2{,}73$. Dieser Zahlenwert ist nicht ganzzahlig; deshalb hat Mandelbrot den Begriff „fraktal“ für die Dimension eingeführt.

1. Satz - Form

- Gitterwürfel
- Statisches Array aus Würfeln
- Symmetrie: Kaleidoskop
- Voronoi-Diagramm
- Platonische Körper:
  Hexaeder
  Tetraeder
  Oktaeder
  Ikosaeder
  Dodekaeder
- Dynamisches Array aus geodätischen Kugeln
- Dynamisches Array aus Würfeln
- Borromäischer Knoten aus 5 Ringen
- Geodätische Kugel
- Gyroidfläche
- Spiralfläche
- Clebsch-Fläche

2. Satz – Simulation

- Partikel-Gravitationssimulation
- Strukturbildung im Universum
- Dynamik starrer Körper
- Dynamik von Flüssigkeiten
- Boids-Schwarmsimulationen
- Boids-Flugbahnen
- Viskoelastische Flüssigkeit
- Thermodynamik
- „gravity set“-Simulation
- „light gravity“-Simulation
- Partikelsimulation „Galaxy-Collision“

3. Satz – Algorithmus

- Belousov-Zhabotinsky-Zellautomat
- Evolutionäre Kunst
- 3D Diffusionsbegrenztes Wachstum
- Gekoppelter Zellautomat
- Zykloid
- 2D Diffusionsbegrenztes Wachstum
- Rabinovich-Fabrikant-Gleichung
- Reaktionsdiffusionssystem:
  Ginzburg-Landau-Modell
- Reaktionsdiffusionssystem:
  Turing-Modell
- Lorenz-Attraktor

4. Satz – Fraktal

- Mandelbrot-Menge
- Secant-Fraktal
- Escape-Fraktal
- Iteriertes Funktionensystem:
  „recursive fractal flames“
- Mandelbulb-Fraktal
- Mandelbox-Fraktal
- Newton-Fraktal
- Menger-Schwamm

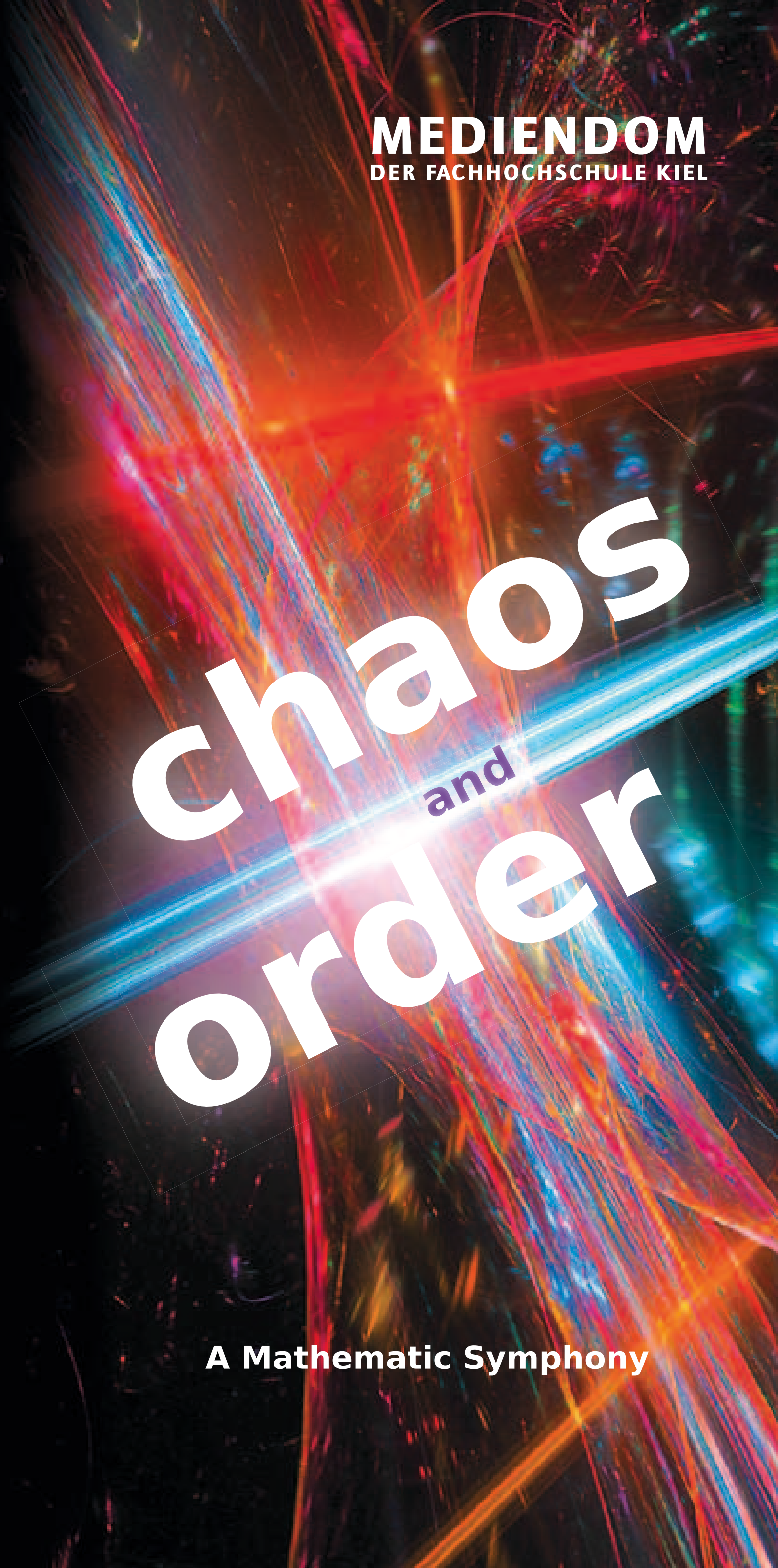
Impressum

Sacherschließung: Prof. Dr. Ulrich Sowada

Bildmaterial: Rocco Helmchen & Prof. Dr. Ulrich Sowada

Gestaltung: Frieder Klotz

Erstellt am Zentrum für Kultur- und Wissenschaftskommunikation der Fachhochschule Kiel



MEDIENDOM
DER FACHHOCHSCHULE KIEL

chaos and order

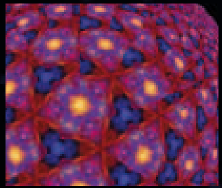
A Mathematic Symphony

Chaos und Ordnung

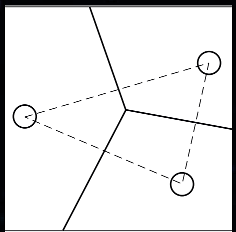
Hintergründliches

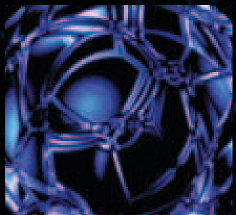
Erster Satz: Form

Kaleidoskop



Bei diesem Gerät handelt es sich um ein Rohr mit 3- oder 4-seitigem Querschnitt, das innen verspiegelt ist und um die Längsachse gedreht werden kann. Wenn man hindurch ein Objekt betrachtet, sieht man das Objekt direkt, aber auch einfach oder mehrfach gespiegelt. Die zu sehenden Bilder lassen sich auch durch Computer berechnen, weil die optischen Vorgänge sehr einfach sind.





Voronoi-Diagramm

Ausgehend von gegebenen Punkten wird der Raum (oder die Ebene) in Zellen um jeden dieser gesetzten Punkte eingeteilt. Alle Punkte innerhalb einer Zelle haben zu dem gegebenen Punkt einen kleineren Abstand als zu allen anderen. In der Ebene werden die Wände der Zellen gebildet aus den Mittelsenkrechten zu den Verbindungslinien zwischen den gesetzten Punkten. Die Formen der Zellen variieren mit der Lage der gesetzten Punkte. Bei einer Vergrößerung der Anzahl dieser Punkte bilden sich neue Formen.

Platonische Körper

Aus den regulären Vielecken der Ebene (Dreieck, Viereck, Fünfeck) werden diejenigen räumlichen Gebilde konstruiert, deren Oberflächen einzig aus diesen Vielecken bestehen. Davon gibt es nur fünf: Tetraeder, Hexaeder (= Würfel), Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Wenn zur Bildung der Oberfläche nicht nur ein Typ von Vieleck zugelassen wird, entstehen weitere Formen (Fußball, Fullerene). An diese Objekte erinnern die im Film gezeigten „geodätischen Kugeln".

Zweiter Satz: Simulation

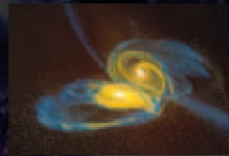
Galaxien-Haufen

Neuere astronomische Beobachtungen lassen erkennen, dass die Galaxien im Kosmos nicht gleichmäßig verteilt sind, sondern sich zu Galaxienhaufen zusammen ballen. Bewegungen innerhalb dieser Haufen sind wegen der großen Abstände innerhalb eines Menschenlebens nicht zu beobachten, aber sie können rechnerisch nachgebildet werden.

Fluid-Dynamik

Die Berechnung von Flüssigkeitsbewegungen beinhaltet außer Trägheits- und Gravitationskräften auch Viskosität und Oberflächenspannung. Diese Kraft wirkt der Vergrößerung der Oberfläche entgegen und lässt Flüssigkeitstropfen kugelförmig werden, wenn keine weiteren Kräfte wirksam sind. Tanzende Flüssigkeiten entstehen durch Wechselwirkung der verschiedenen Energieformen (kinetische, potentielle, Strömungs- und Oberflächen-Energie).

Kollidierende Galaxien



Zwei Körper im Raum, die aufeinander Gravitation ausüben, bewegen sich nach Kepler auf geschlossenen Bahnen. Der französische Mathematiker Henry Poincaré (1854 – 1912) hat berechnet, dass die zeitliche Entwicklung von mehr als zwei Körpern nicht mehr exakt in alle Zukunft vorausgesagt werden kann: Das Ergebnis kann drastisch anders aussehen als eine rechnerische Vorhersage, wenn ein Ort oder eine Geschwindigkeit zu Beginn unmerkbar anders eingesetzt wird. Im südlichen Sternbild Rabe gibt es zwei Galaxien, die offenbar miteinander kollidieren. Die Kräfte auf jeden einzelnen Stern verändern die Sternenbahnen; beim Zusammenspiel von Gravitation und Trägheit entstehen Gezeitenkräfte, die einzelne Sterne aus den Galaxien heraus schleudern.

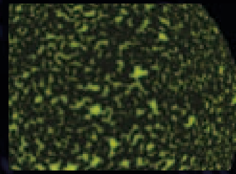
Dritter Satz: Algorithmen

Rabinovitch-Fabrikant-Gleichung

Diese beiden Forscher veröffentlichten 1979 drei gekoppelte gewöhnliche, nichtlineare Differentialgleichungen (unabhängige Variable: Zeit t). Die Lösungen zeigen die für mathematisches Chaos typische Verhaltensweise: Die Kurvenverläufe hängen stark vom Wert der Koeffizienten ab.

Reaktions-Diffusions-System (Turing-Modell)

Die zeitliche Veränderung der Konzentration einer Substanz hängt davon ab, wie viel durch Diffusion aus dem betrachteten Volumen austritt und wie viel durch chemische Reaktion umgebildet wird.

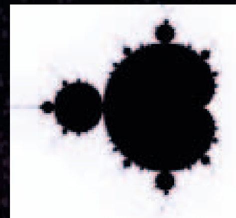


Aus denselben Anfangsbedingungen entstehen bei jeder Versuchsdurchführung andere Endresultate, weil Diffusion ein statistischer Vorgang ist. Dies lässt sich mit Computern modellhaft berechnen. Durch die Kombination eines statistischen Vorganges (Diffusion) mit einem determnistischen (chemische Reaktion) entstehen bei Wiederholung andere Formen; die Formen haben aber Ähnlichkeit miteinander.

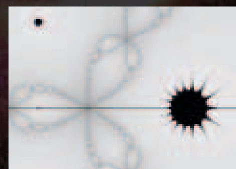
Vierter Satz: Fraktale

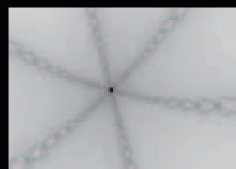
Der Begriff des Fraktals wurde durch den französisch-amerikanischen Mathematiker Benoit Mandelbrot (1924 – 2010) eingeführt. Damit wird es möglich, der Rauheit in der Natur eine Maßzahl zu geben; denn ein Berg ist kein Kegel. Eine oft beobachtete Eigenschaft von Fraktalen ist die Selbstähnlichkeit: Bei Vergrößerungen eines Bildausschnitts werden Formen sichtbar, die dem Ausgangsobjekt ähneln.

Mandelbrot-Menge



Die komplexen Zahlen c (c = a + i * b) werden repräsentiert durch die Punkte der Ebene, in der entlang der x-Achse die reellen (a) und entlang der y-Achse die imaginären Zahlen (b) aufgetragen werden. Es wird $z_0 = 0$ gesetzt und auf jeden Punkt c dieser Ebene der Algorithmus $z_n = z_{n-1}^2 + c$ (n = 1, 2, ...) angewendet. Wenn der Betrag von z_n einen Wert (z. B. 2) übersteigt, wird die Iteration (=Wiederholung dieser Berechnung) abgebrochen und der Punkt in der komplexen Ebene entsprechend dem dann entstandenen Wert von n eingefärbt. Die Mandelbrot-Menge (nach Benoit Mandelbrot, 1924 – 2010) wird von denjenigen Punkten der komplexen Ebene gebildet, die auch nach vielen Iterationen diese Abbruchbedingung nicht erreichen.





Newton-Fraktal

Für Gleichungen, deren Nullstellen sich nicht exakt berechnen lassen, gibt es ein Näherungsverfahren. Dieses Verfahren liefert unter geeigneten Bedingungen gegenüber einem Schätzwert ein verbessertes Ergebnis. Eine wiederholte Anwendung kann zu einem befriedigenden numerischen Ergebnis führen. Wenn der Schätzwert in der Nähe eines Extremwertes liegt, erhält man für sehr dicht neben-